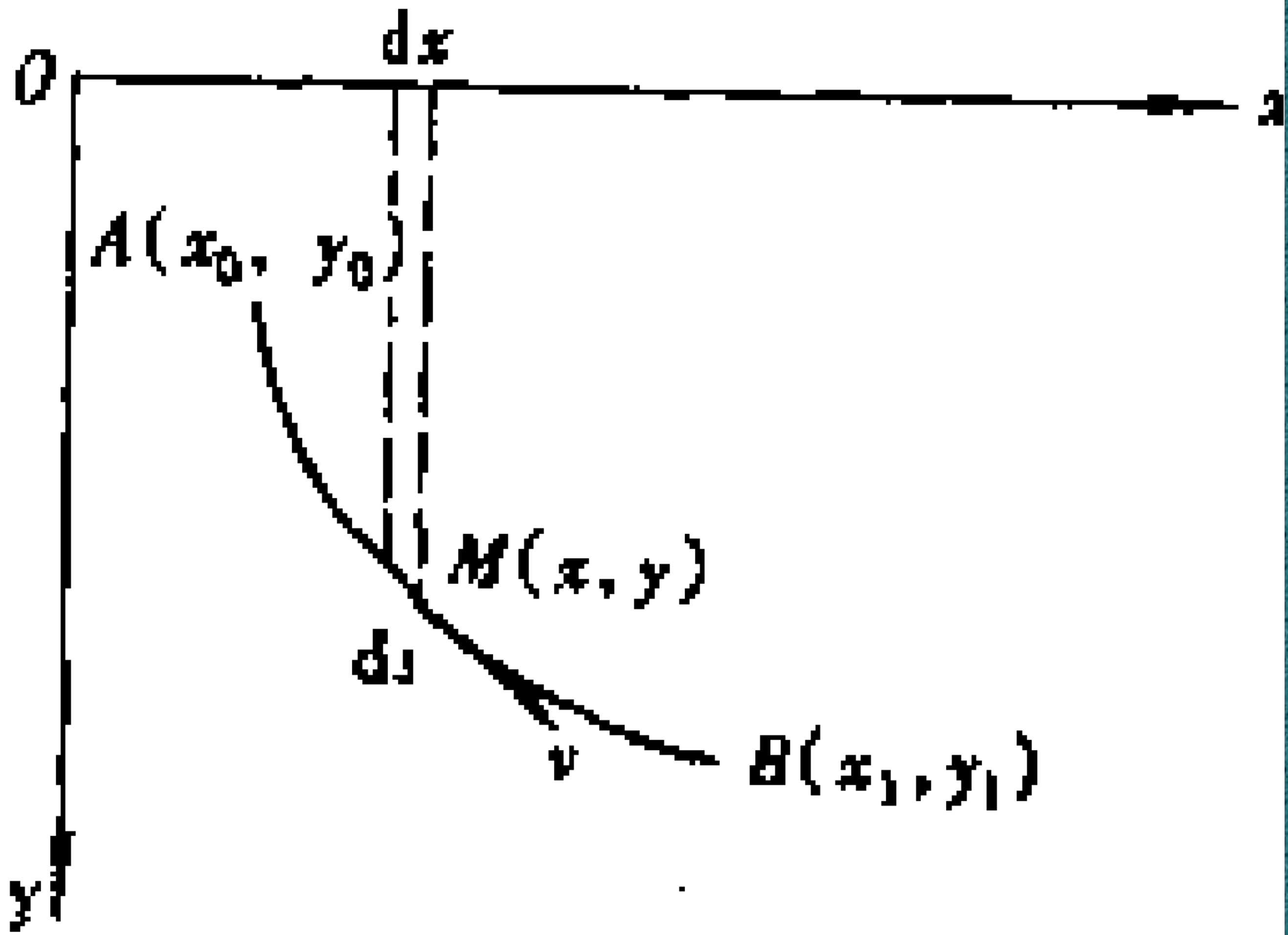
电磁场数值计算

王泽忠

泛函举例：最速降线问题



最速降线问题是：设 O 与 A 是高度不同且不在同一铅垂线上的两定点，如果没有摩擦和空气阻力，一质点在重力作用下从 O 点沿一曲线降落至 A 点，问曲线呈何种形状时，质点降落的时间最短？

设经过 O 与 A 的铅垂平面为 XOY，OX 为水平轴，OY 轴铅垂向下，A 点的坐标为 (a, b)，且 $b > 0$。质点从 O 开始运动，它的速度 v 与它的纵坐标有关系：

$$v^2 = 2gy, \tag{2.1.1}$$

其中 g 是重力加速度.

设质点降落曲线的方程为 $y=y(x)$, 则由 (2.1.1) 有

$$\frac{ds}{dt}=v=\sqrt{2gy},$$

由此得

$$dt=\frac{ds}{\sqrt{2gy}}=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx.$$

对此式积分，得出质点沿曲线 $y=y(x)$ 由 O 降至 A 所需的时间为

$$t=t[y(x)]=\int_0^a\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx. \qquad (2.1.2)$$

这就说明，质点由 O 降至 A 所需的时间 t 是函数 $y(x)$ 的函数，称 t 是函数 $y(x)$ 的泛函，最速降线问题就是在满足边界条件

$$y(0)=0,\quad y(a)=b \tag{2.1.3}$$

的所有连续函数 $y(x)$ 中求出一个函数使泛函 (2.1.2) 取最小值.

古典变分问题：

1、最速降线（捷线）问题（1630年伽利略，错误；1697年牛顿，解决。1697年雅可布.伯努力，变分法）

2、短程线（测地线）问题（1697年，约翰.伯努力）

3、等周问题（古老问题，1701年雅克布.伯努力解决。1744年欧拉用变分法解决）

学习变分法要领：

1、泛函概念

2、泛函极值问题

2、变分运算定义

3、变分运算规则

4、欧拉方程

最简泛函

函数个数？自变量个数？导数阶数？

欧拉方程

1、 最简泛函对应的欧拉方程

最简泛函的表达式： $J\left(y(x)\right)=\int_{x_0}^{x_1}F\left(x,y,y'\right)\mathrm{d}x$

是最简泛函取得极值且满足固定边界条件 $y(x_0)=y_0$**，** $y(x_1)=y_1$ **的极值函数** $y(x)$ **必满足**

欧拉方程： $F_y-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}=0$

证明：

$$\delta J=\delta\int_{x_0}^{x_1}F\left(x,y,y'\right)\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_1}\delta F\left(x,y,y'\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y\delta y+F_{y'}\delta y'\right)\mathrm{d}x$$

因 $\left(F_{y'}\delta y\right)' = F_{y'}\delta y' + \left(\dfrac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y$，有

$F_{y'}\delta y' = \left(F_{y'}\delta y\right)' - \left(\dfrac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y$，代入泛函变分公式

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1}\left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y\mathrm{d}x + \left(F_{y'}\delta y\right)\Big|_{x_0}^{x_1} = \int_{x_0}^{x_1}\left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y\mathrm{d}x = \mathbf{0}$$

得：$F_y - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = 0$

2、 多自变量函数泛函对应的欧拉方程(二个自变量函数泛函的表达式)：

$$J\left(u(x,y)\right) = \iint_D F\left(x,y,u,u_x,u_y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

欧拉方程：

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} = 0$$

证明：

$$\delta J = \iint_D \delta F\left(x, y, u, u_x, u_y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D \left(F_u \delta u + F_{u_x} \delta u_x + F_{u_y} \delta u_y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

因 $\frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x}\delta u) = F_{u_x}\delta u_x + \left(\frac{\partial}{\partial x} F_{u_x}\right)\delta u$，有

$F_{u_x}\delta u_x = \frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x}\delta u) - \left(\frac{\partial}{\partial x} F_{u_x}\right)\delta u$，同理 $F_{u_y}\delta u_y = \frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y}\delta u) - \left(\frac{\partial}{\partial y} F_{u_y}\right)\delta u$

得 $\delta J = \iint_D \left(F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y}\right)\delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x}\delta u) + \frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y}\delta u)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

根据散度定理

$$\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x}\delta u) + \frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y}\delta u) \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_\Gamma \left(F_{u_x}\boldsymbol{e}_x + F_{u_y}\boldsymbol{e}_y \right) \cdot \boldsymbol{e}_n \delta u \mathrm{d}\Gamma$$

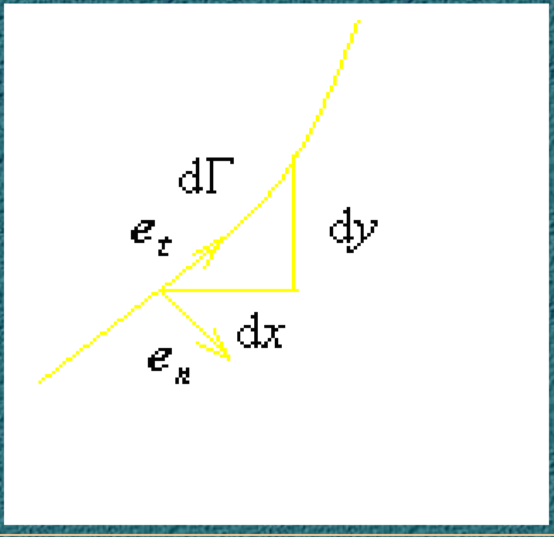
$$= \oint_\Gamma \left(F_{u_x}\delta u dy - F_{u_y}\delta u dx \right)$$

图中可知切向单位矢量 $\boldsymbol{e}_t = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\Gamma}\boldsymbol{e}_x + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\Gamma}\boldsymbol{e}_y$， 法向单位矢量

$$\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_t = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\Gamma}(\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_x) + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\Gamma}(\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_y) = -\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\Gamma}\boldsymbol{e}_y + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\Gamma}\boldsymbol{e}_x$$

在边界上有 $\delta u = 0$，所以上述积分为零。

因此，若要满足 $\delta J = 0$，必须使



$$F_u - \frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{u_y} = 0$$

三个自变量函数泛函的欧拉方程

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}-\frac{\partial}{\partial z}F_{u_z}=0$$

同理可列出多个自变量函数的欧拉方程。

3、多个函数泛函的欧拉方程

二个函数泛函表达式：

$$J\big(u(x),v(x)\big)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,u,v,u',v')\mathrm{d}x$$

欧拉方程

$$\begin{cases}F_u-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{u'}=0\\[2ex] F_v-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{v'}=0\end{cases}$$

三个函数泛函对应的欧拉方程

$$\begin{cases} F_u - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{u'} = 0 \\ F_v - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{v'} = 0 \\ F_w - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{w'} = 0 \end{cases}$$

同理，可以列出多个函数泛函对应的欧拉方程。

4、 含高阶导数泛函对应的欧拉方程

含二阶导数泛函的表达式

$$J\big(y(x)\big) = \int_{x_0}^{x_1} F\big(x, y, y', y''\big)\mathrm{d}x$$

欧拉方程

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} F_{y''} = 0$$

含高阶导数泛函对应的欧拉方程

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}F_{y''} - \cdots + (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}F_{y^{(n)}} = 0$$

5、一般泛函对应的欧拉方程统一公式

泛函表达式

$$J\big(u(x,y),v(x,y)\big) = \iint_D F(x,y,u,v,u_x,u_y,v_x,v_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy},v_{xx},v_{xy},v_{yy})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

欧拉方程公式

$$\begin{cases} F_u - \left(\dfrac{\partial}{\partial x}F_{u_x} + \dfrac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right) + \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}F_{u_{xx}} + \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}F_{u_{xy}} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}F_{u_{yy}}\right) = 0 \\ F_v - \left(\dfrac{\partial}{\partial x}F_{v_x} + \dfrac{\partial}{\partial y}F_{v_y}\right) + \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}F_{v_{xx}} + \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}F_{v_{xy}} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}F_{v_{yy}}\right) = 0 \end{cases}$$

上式可以扩展到l个自变量，m个函数，n阶导数的泛函的情况。

导数阶数

自变量个数　　自变量个数

函数个数

$$\begin{cases} F_u - \left(\dfrac{\partial}{\partial x} F_{u_x} + \dfrac{\partial}{\partial y} F_{u_y} \right) + \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} F_{u_{xx}} + \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{u_{xy}} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} F_{u_{yy}} \right) = 0 \\ F_v - \left(\dfrac{\partial}{\partial x} F_{v_x} + \dfrac{\partial}{\partial y} F_{v_y} \right) + \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} F_{v_{xx}} + \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{v_{xy}} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} F_{v_{yy}} \right) = 0 \end{cases}$$

例 1.6.3 求泛函极值问题

$$\begin{cases} J[u(x,y,z)] = \iiint\limits_{\Omega} \left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + 2uf(x,y,z) \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \\ u \in C^2(\Omega), u|_{\partial\Omega} = g(M)|_{M\in\partial\Omega} \end{cases}$$

的驻留函数所满足的微分方程.

解 由奥氏方程得

$$2f(x,y,z) - 2u_{xx} - 2u_{yy} - 2u_{zz} = 0,$$

即

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x,y,z).$$

于是得到泊松方程边值问题：

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \Omega \text{ 内}, \\ u|_{\partial\Omega} = g. \end{cases}$$